Décomposition en séries de Fourier d'un signal périodique

I) ASPECT MATHEMATIQUE :

I-1) Décomposition en séries de Fourier :

Une fonction périodique f(t) de période T peut, sous certaines conditions mathématiques qui seront toujours réalisées dans la pratique en physique, se décomposer en une somme de fonctions sinusoï dales de la forme : (décomposition en séries de Fourier)

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nwt + b_n \sin nwt\right) \qquad \text{(n entier et } w = \frac{2p}{T}\text{)}$$

Les coefficients a_0, a_n et b_n sont indépendants du temps et sont donnés par les intégrales suivantes :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt \qquad a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos nwtdt \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin nwtdt$$

On remarque que a_0 est la valeur moyenne de la fonction f(t) : a_0 est donc nul si la fonction f(t) est alternative.

Deux cas particuliers :

*** Si la courbe représentative de la fonction f(t) admet un centre de symétrie situé sur l'axe Ox, alors, en choisissant ce point comme origine des temps :

$$f(-t)=-f(t)$$

La fonction f(t) est une fonction impaire ; son développement en séries de Fourier ne comportera que des termes en sinus (les coefficients a_n sont nuls).

*** Si la courbe représentative de la fonction f(t) admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie, alors f(-t)=f(t) (fonction paire). Le développement en séries de Fourier ne contient alors que des termes en cosinus ((les coefficients b_n sont nuls).

I-2) Spectre en fréquences :

Le terme général $a_n \cos nwt + b_n \sin nwt$ est appelé harmonique de rang n. Il peut être mis sous la forme :

$$a_n \cos nwnt + nb_n \sin nwt = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}\left[\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}\cos nwt + \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}\sin nwt\right]$$

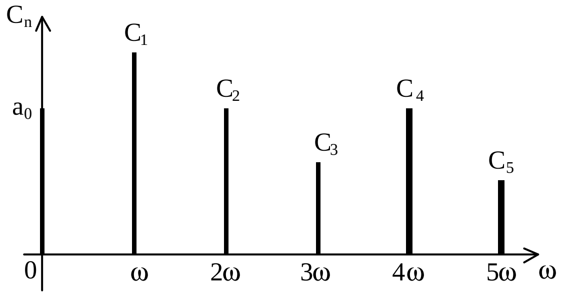
En posant $C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$; $\tan j_n = \frac{b_n}{a_n}$; $\cos j_n = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$, il vient :

$$a_n \cos nwt + b_n \sin nwt = C_n \cos(nwt - j_n)$$

Et la fonction périodique f(t) peut alors s'écrire : $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(nwt - j_n)$

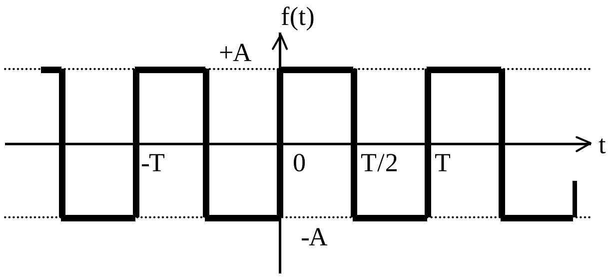
L'harmonique de rang 1 est appelé le fondamental.

On obtient la représentation spectrale de la fonction f(t) en portant en ordonnée l'amplitude des harmoniques (les termes a_n, b_n ou C_n) et en abscisse les pulsations correspondantes, ce qui conduit au diagramme de la figure ci-contre. (avec ici représentés les coefficients C_n)



I-3) Exemples de décomposition en séries de Fourier :

a) Signal carré :

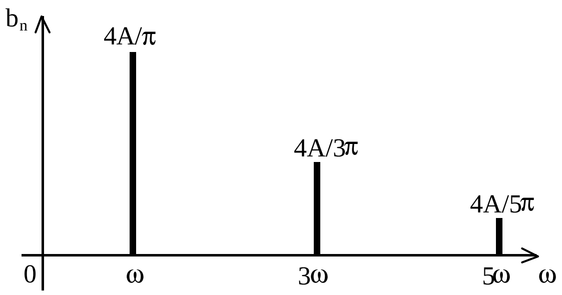


On considère le signal de la figure ci-contre . La fonction f(t) est impaire et sa décomposition ne contiendra que des termes en sinus. On peut calculer :

$$a_0 = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin n\omega t\,dt = \frac{2A}{n\pi}(1-\cos n\pi) = \frac{2A}{n\pi}(1-(-1)^n)$$

Par conséquent, la décomposition ne comprend que des harmoniques d'ordre impair :

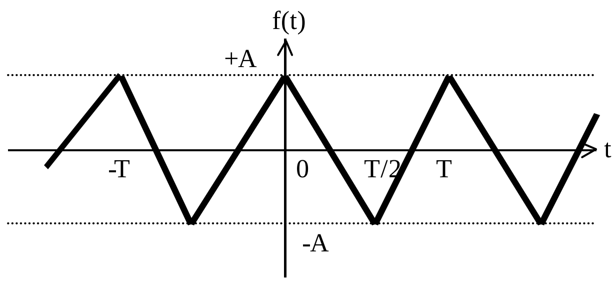


$$f(t) = \frac{4A}{\pi}\left[\sin\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\omega t + ...\right]$$

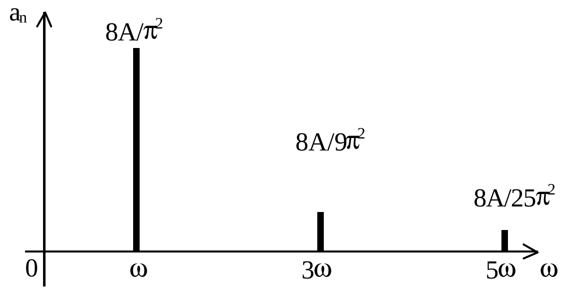
Son spectre est donné sur la figure ci-contre.

b) Signal triangulaire :

On considère le signal triangulaire donné ci-dessous (la fonction f(t) est paire). La décomposition en séries de Fourier s'écrit alors :



Signal triangulaire

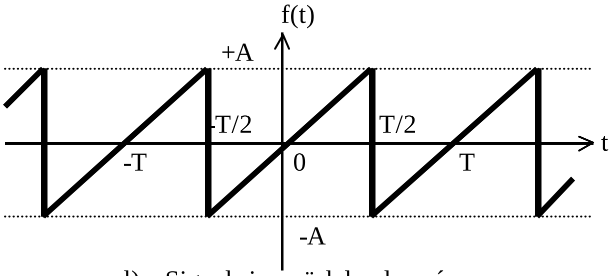


Spectre en fréquences

$$f(t) = \frac{8A}{\pi^2}\left[\cos\omega t + \frac{1}{3^2}\cos 3\omega t + \frac{1}{5^2}\cos 5\omega t + ...\right]$$

On peut remarquer que les harmoniques d'ordre supérieur à 1 sont beaucoup moins importants pour le signal triangulaire que pour le signal carré, ce qui est naturel puisque le signal triangulaire a une forme proche de celle d'un signal sinusoï dal.

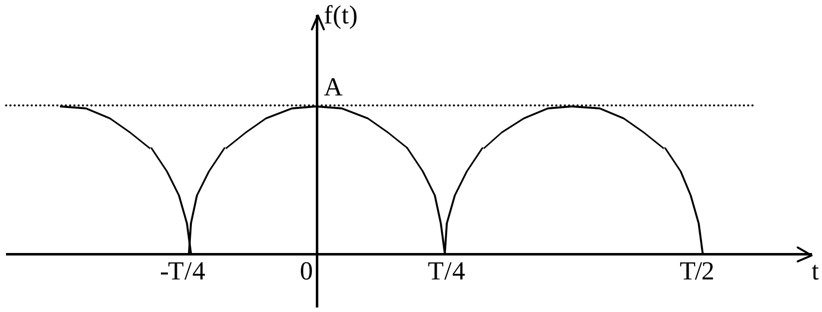
c) Signal en dents de scie :



$$f(t) = \frac{2A}{p}\left[\sin wt - \frac{1}{2}\sin 2wt + \frac{1}{3}\sin 3wt - \frac{1}{4}\sin 4wt + ...\right]$$

d) Signal sinusoï dal redressé :

$$f(t) = \frac{2A}{p} + \frac{4A}{p}\left[\frac{1}{3}\cos 2wt - \frac{1}{3.5}\cos 4wt + \frac{1}{5.7}\cos 6wt + ...\right]$$



II) MISE EN EVIDENCE EXPERIMENTALE DES HARMONIQUES D'UN SIGNAL :

On alimente un circuit série (RLC) par un générateur BF (supposé idéal) délivrant des signaux sinusoï daux, triangulaires ou carrés. Les valeurs des composants utilisés sont :

L=44 mH ; C=0,1 µF ; R=10 Ω (résistance de la bobine inconnue)

Un oscilloscope bicourbe permet de visualiser les tensions aux bornes du générateur et aux bornes de R.

1) Faire le schéma du montage utilisé en précisant notamment les branchements de l'oscilloscope.

2) Calculer théoriquement la pulsation et la fréquence de résonance d'intensité, ainsi que le facteur de qualité du circuit (RLC) série.

3) Expérimentalement, on détermine la fréquence de résonance d'intensité en injectant une tension sinusoï dale à l'entrée du circuit. On mesure f_0=2390 Hz. La tension maximale d'alimentation est E_m=0,3 V et la tension maximale aux bornes de R est $U_{R,max}$=0,138 V.

a) Déterminer l'intensité maximale dans le circuit à la résonance d'intensité.

b) En déduire la résistance totale du circuit. Quelle est la valeur de la résistance de la bobine ?

4) On utilise maintenant une tension d'entrée carrée, de fréquence f_0 et de valeur maximale 0,3 V. La valeur maximale de la tension aux bornes de R est alors de 0,175 V.

a) Quelle est la forme et la fréquence de la tension observée aux bornes de R ? Tracer, sur un même dessin, la tension d'entrée et la tension aux bornes de R.

b) Quelle est l'intensité maximale dans le circuit ?

c) Faire une analyse de Fourier du signal carré et vérifier que les résultats expérimentaux sont en accord avec cette décomposition. Déterminer notamment le premier coefficient de cette décomposition.

5) On utilise désormais un signal d'entrée triangulaire de valeur maximale 0,3 V et de fréquence f_0. La valeur maximale de la tension aux bornes de R est alors 0,108 V.

Répondre aux mêmes questions qu'en (4).

6) Observation des harmoniques : on diminue lentement la fréquence du signal d'alimentation en gardant la même valeur pour sa valeur maximale (0,3 V). On observe des résonances secondaires pour lesquelles l'intensité dans le circuit est sinusoï dale et passe par une valeur maximale. Les résultats numériques sont consignés dans les tableaux suivants :

Signaux carrés :

f(Hz)	2390	796	478	342	266
U_R (mV)	175	55	40	33	25

Signaux triangulaires :

f(Hz)	2390	800	480	345
U_R (mV)	108	12	5	3

Montrer que ces résultats expérimentaux sont en accord avec la décroissance des coefficients de la décomposition en série de Fourier en 1/n pour le signal carré et en $1/n^2$ pour le signal triangulaire.